Themenübersicht für die Jahrgangsstufen 11 bis 13

Grundfach

1

Grenzwerte
Differentialrechnung
Integralrechnung
Exponentialfunktionen

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

wahlweise

2

Geraden und Ebenen im Raum	Geometrische Abbildungen und Matrizen	Matrizen in praktischen Anwendungen

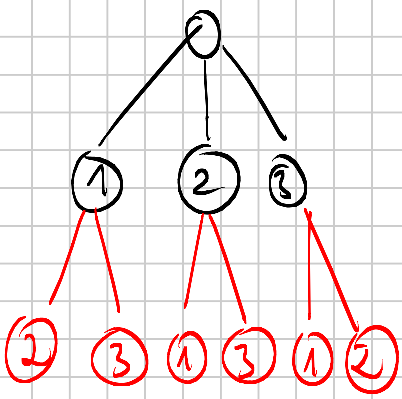
Stochastik 1

3

Stochastik 2

wahlweise

Simulation von Zufallsexperimenten	Testen von Hypothesen	Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

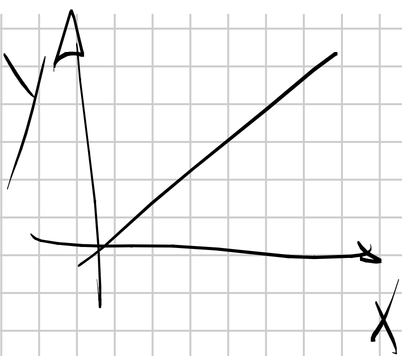


← Ihre Wahl (mit Qual)

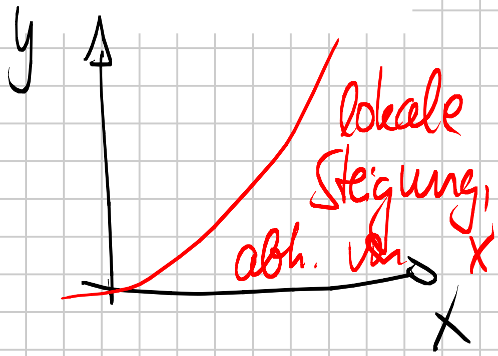
← Wahl Prüfer (1 aus beiden!)

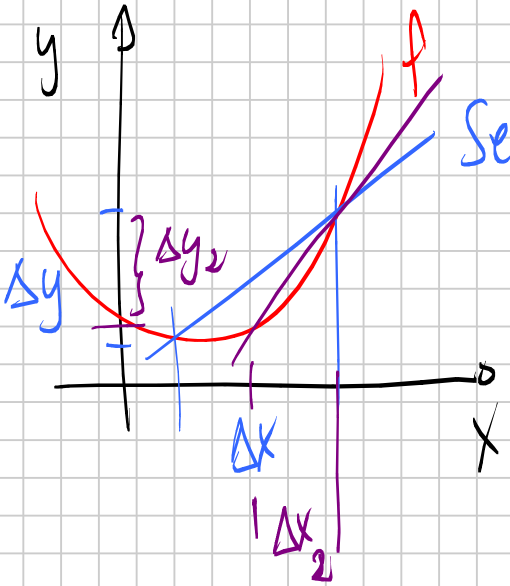
Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Die explizite und rekursive Beschreibung von Zahlenfolgen verstehen und Eigenschaften von Zahlenfolgen kennen	Die Schülerinnen und Schüler sollen zu vorgegebenem Bildungsgesetz Folgenglieder bestimmen und umgekehrt in einfacheren Fällen ein Bildungsgesetz angeben können.
2. Den Begriff "Grenzwert einer Folge" verstehen $0{,}1 \; ; \; 0{,}01 \; ; \; 0{,}001 \; ; \ldots$ $\frac{1}{10^n}$	Der Begriff "Grenzwert" soll exemplarisch an Zahlenfolgen erfahren werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen eine inhaltliche Vorstellung davon gewinnen, was in der Mathematik unter einem Grenzwert verstanden wird. Der Begriff kann auf unterschiedlichen Niveaustufen erschlossen werden. Im Grundkurs genügt eine an der Definition orientierte verbale Beschreibung; auf eine Formalisierung ($\varepsilon - n_0$–Fassung) sollte verzichtet werden.
3. Die Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient von Folgen kennen und anwenden	Die Gültigkeit der Grenzwertsätze wird an Beispielen einsichtig gemacht.
4. Grenzwerte bestimmen	

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
1. Den Begriff "Ableitung an einer Stelle" verstehen	Die Ableitung sollte als Grenzwert von Sekantensteigungen eingeführt werden.
2. Die Ableitung als momentane Änderungsrate interpretieren	Im Hinblick auf die zentrale Bedeutung des Differentialquotienten sollen die Schülerinnen und Schüler auch mindestens eine nicht-geometrische Interpretation kennen.
3. Den Begriff "Ableitungsfunktion" verstehen	



globale Steigung m





Sekante mit Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

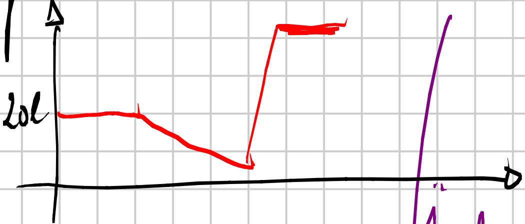
genauer: $\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$

usw.

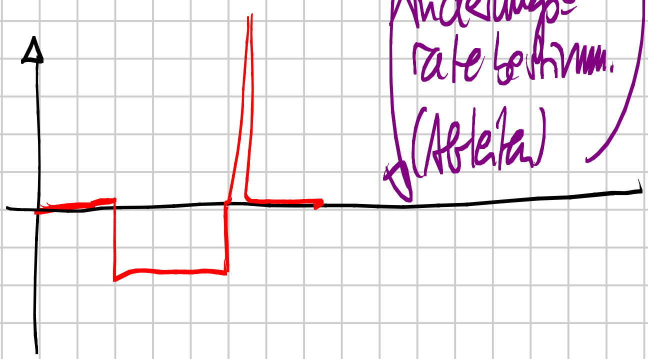
Idee: $\Delta x \to 0$ laufen lassen, Sekantensteigung wird beliebig genau

„Momentane Änderungsrate"

Füllstand Tank:



„Änderungsrate Tank:

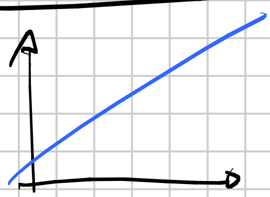


Änderungs= rate bestimm. (Ableiten)

Bestands= rekonstruktion (Integrieren)

Ableitungsfunktion + Faktor-, Summen-, Potenzregel:

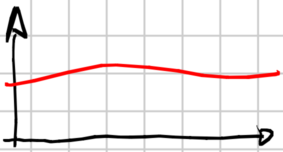
Ausgangsfkt.



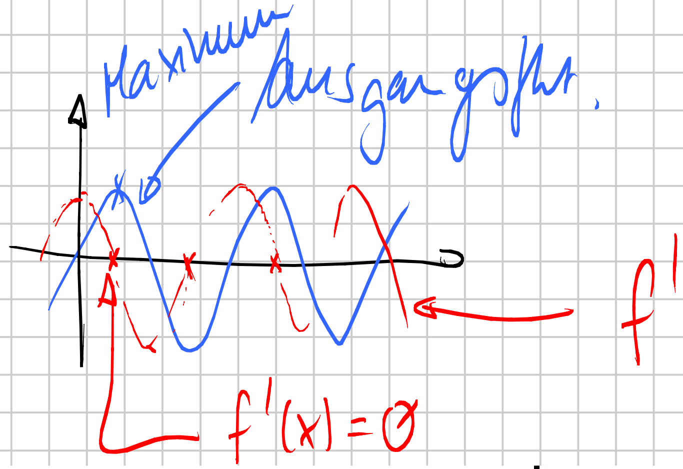
$\to$ $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 3$

$x^2 \to 2x$

Ableitungsfkt.



$\to$ $f'(x) = 3x^2 + 4 \cdot 2x - 7$



4. Faktor-, Summen- und Potenzregel kennen

5. Zu einer vorgegebenen Funktion die Ableitungsfunktion und höhere Ableitungen bestimmen

6. Den Graphen der Ableitungsfunktion zu einem vorgegebenen Funktionsgraphen skizzieren

Der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms wird empfohlen, um den Zusammen-hang zwischen den beiden Graphen an unterschiedlichen Funktionen anschaulich erfahrbar zu machen.

Extrema:

7. Notwendige und hinreichende Kriterien für Monotonie und für die Existenz von Extrema und Wendepunkten anschaulich begründen und anwenden

$f'(x) = 0$ setzen: Extremum, $f''(x)$ < Min. / Max.

8. Ganzrationale Funktionen diskutieren

Extrema → Max / Min. bestimmen, um

Es genügen einige charakteristische Beispiele. Wenn Funktionsplotprogramme mit speziellen Optionen (z.B. Zoom, Trace) zugelassen werden, müssen die Aufgabenstellungen zur Funktionsuntersuchung dem angepasst sein.

9. Funktionsgleichungen ganzrationaler Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften bestimmen

Es genügen einige charakteristische Beispiele.

10. Extremwertaufgaben aus verschiedenen Anwendungsgebieten lösen

diese Aufg. lösen zu können

= INTEGRALE =

1. Flächeninhalte unter Funktionsgraphen ~~mit Hilfe von~~ Rechtecksummen bestimmen 117 Bestand	Für umfangreiche Termumformungen empfiehlt sich der Einsatz eines Computer-Algebra-Systems. Die Schülerinnen und Schüler sollen auch erfahren, wie mit Hilfe von Rechnern Flächeninhalte bzw. Integrale numerisch angenähert werden können.
2. Den Integralbegriff verstehen	
3. Faktor-, Summen- und Potenzregel kennen und zur Berechnung von Integralen anwenden .	Die Regeln werden an Beispielen oder durch Veranschaulichungen einsichtig gemacht. An die Behandlung der Regeln können sich unmittelbar Anwendungsaufgaben mit ganzrationalen Funktionen anschließen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird bei diesem Vorgehen zurückgestellt.

- Integration $\hat{=}$ Umkehrung des Ableitens
- Ableitungsfunktion bekannt → „Integral kann rekonstruiert"
  „Änderungsrate bekannt → Rückschluss auf den Bestand möglich
- Regeln, s. o., Pkt. 3

Stammfkt. bestimmen → Integral berechnen

$f(x) = x^2$ $\quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad \int_a^b \frac{1}{3}x^3 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$

Anwendungsaufgaben lösen

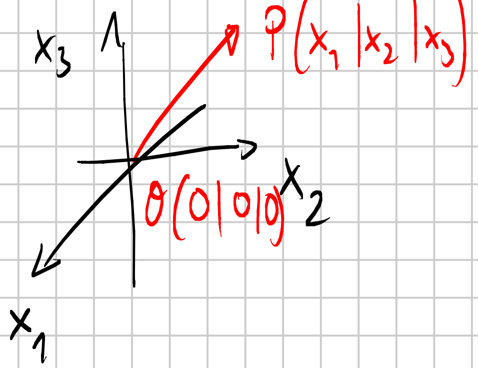
Vektoren + Geraden/Ebenen im Raum mit Vektoren beschreiben

3. Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren	Der Vektorbegriff umfasst hier Ortsvektoren, Pfeilklassen und Zahlentripel/-paare.
4. Den Begriff "Linearkombination" kennen und anwenden	

Vektoren im Raum ("3D")

Vektoren in Ebene ("2D")

Ortsvektor



"a · Vektor 1 + b · Vektor 2"

$g: \vec{x} = \vec{s}_1 + a \cdot \vec{r}$

$\vec{s}$: Stützvektor

$\vec{r}$: Richtungsvektor

$E: \vec{x} = \vec{s}_2 + a \cdot \vec{p} + b \cdot \vec{q}$

$\vec{p}, \vec{q}$: Spannvektor

5. Die Parameterform der Geraden- und Ebenengleichung verstehen	
6. Die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum bestimmen	Es sollen die Fälle “Gerade – Gerade”, “Gerade – Ebene” und, exemplarisch, “Ebene – Ebene” untersucht werden. Die Lagebeziehungen “Gerade – Ebene” und “Ebene – Ebene” können auch nach Einführung der Normalengleichung der Ebene behandelt werden.

$\vec{v}$

$$g_1: \vec{x} = g_2: \vec{x}$$

$$g: \vec{x} = E: \vec{x}$$

Gauß-Algorithmus

1. Zu einer geeigneten Problemstellung ein entsprechendes lineares Gleichungssystem aufstellen	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, bei der Untersuchung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen, aber auch – gebietsübergreifend – im Rahmen der Analysis (Bestimmen einer Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften) behandelt werden.
2. Lineare Gleichungssysteme lösen	Die in der Sekundarstufe I behandelten Verfahren werden auf Systeme mit mehr als zwei Gleichungen und mehr als zwei Variablen erweitert. Im Vordergrund stehen 3x3-Systeme. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht auf ein bestimmtes Verfahren (z.B. Gauß-Algorithmus) festgelegt werden, sondern sich für einen möglichst günstigen Weg entscheiden. Wird der Rechenaufwand zu groß, sollten geeignete Computerprogramme eingesetzt werden. Wenn auch die Behandlung des Gauß-Algorithmus nicht verbindlich ist, wird dennoch empfohlen, exemplarisch einen Einblick in dieses Verfahren zu geben, und zwar unter dem Aspekt, einen Lösungsalgorithmus für Gleichungssysteme zu finden, den man auf den Computer übertragen kann.

Gegeben: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt bestimmen:

$\hat{=}$ gemeinsame Punkte beider Objekte bestimmen

nicht linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$3 = a \cdot 2 \quad a = 1\frac{1}{2}$

$1 = a \cdot 2 \quad a = \frac{1}{2}$

$-2 = a \cdot 1 \quad a = -2$

$\lightning$

$s,t \in \mathbb{R}$

sind Parameter

Element aus der Menge der reellen Zahlen

$g_1: \vec{x} = g_2: \vec{x}$ (allgemein)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (mit konkreten Zahlen)

Komponentengleichungen:

$x_1: \quad 0 + 3s = 7 + 2t \quad | -2t$

$x_2: \quad 2 + 1s = 2 + 2t$

$x_3: \quad 3 - 2s = -4 + 1t$

} lineares Gleichungssystem (LGS)

Umstellen

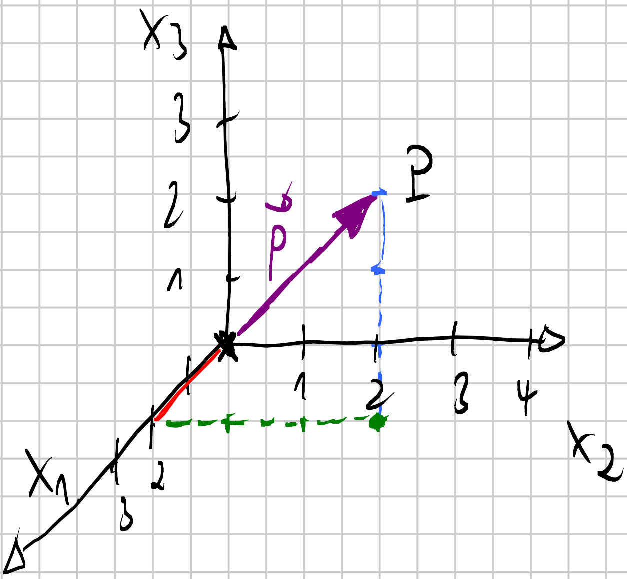
$x_1: \quad 3s - 2t = 7$

Fallunterscheidung:

s, t können bestimmt werden
$\Rightarrow$ LGS hat Lösung
$\Rightarrow$ Schnittpkt

s, t: keine Lsg $\Rightarrow$ windschief

7.	Die Lage gegebener Geraden und Ebenen durch Zeichnen in ein Koordinatensystem veranschaulichen	Eine Beschränkung auf einfache Fälle ist möglich. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass das Einzeichnen von geeigneten Ausschnitten der Koordinatenebenen, das Markieren von Spurpunkten und Spurgeraden sowie das Beachten verdeckter Punkte und Linien den räumlichen Eindruck wesentlich verbessern. Zur Motivation und zur Unterstützung der Raumanschauung empfiehlt sich der Einsatz von Unterrichtssoftware, die Geraden und Ebenen im Koordinatensystem darstellt.
8.	Das Skalarprodukt zweier Vektoren bestimmen und in geometrischen Fragestellungen anwenden	Unter geometrischen Anwendungen werden z.B. verstanden: – Berechnung von Winkeln – Prüfen von Orthogonalität – Bestimmen orthogonaler Vektoren – Beweise elementargeometrischer Sätze.



$P(2|3|3)$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ebenen im 3D-Koordinatensystem zeichnen können:

KoordinatenGL als Ausgangspunkt: $3 x_1 + 4 x_2 + 5 x_3 = 5$

Schnittpunkt mit x_1-Achse: x_2 und x_3 gleich Null setzen und x_1 ausrechnen.

9. Die allgemeine Normalengleichung der Ebene kennen und anwenden

10. Wissen und begründen, dass eine Koordinatengleichung mit drei Variablen eine Ebene beschreibt und die vom Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen bekannten Fälle “eine Lösung”, “keine Lösung” oder “unendlich viele Lösungen” geometrisch deuten

WICHTIG:
ParameterGL, NormalenGL, KoordinatenGL vergleichen können,

Bsp. Punktprobe:
Welche der GL ist am effizientestesten für eine Punktprobe?

Punktprobe: Überprüfen, ob ein Punkt auf einem Objekt liegt.
Objekt kann eine Gerade, eine Ebene, etc. sein.

1. Zufallsexperimente durch ihre Ergebnismengen beschreiben	
2. Wahrscheinlichkeiten bestimmen und in Sachzusammenhängen interpretieren	Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung eines inhaltlichen Verständnisses des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit soll an Beispielen erfahren werden (empirisches Gesetz der großen Zahlen); die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als Spezialfall behandelt. Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten können systematische Abzählverfahren verwendet werden; eine ausführliche Behandlung kombinatorischer Regeln ist nicht intendiert.

3. Einfache Rechenregeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen anwenden	z.B. Pfadregeln (Summe, Produkt), Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses
4. Die Begriffe "Bernoullikette" und "Binomialverteilung" verstehen und wissen, wie man die Werte einer Binomialverteilung bestimmen kann	Eine explizite Berechnung der Werte der Binomialverteilung soll nur exemplarisch mit wenigen Stufen durchgeführt werden. Die Herleitung der entsprechenden Formel ist nicht gefordert. Beim Lösen von Anwendungsaufgaben werden Tabellen für die Binomialverteilung benutzt. Binomialverteilungen sollen auch grafisch dargestellt werden (Histogramme). Wenn Wahlpflichtgebiet 1 ("Simulation von Zufallsexperimenten") gewählt wird, sollten Werte der Binomialverteilung auch mit Hilfe der Monte-Carlo-Methoden bestimmt werden.

5. Sachaufgaben zur Binomialverteilung lösen	Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, dass viele Zufallsexperimente im täglichen Leben durch eine Binomialverteilung ausreichend gut modelliert werden können.
6. Erwartungswert und Standardabweichung für Binomialverteilungen berechnen und anwenden NUR, WENN ES NOCH BEHANDELT WIRD!!!	Die Formeln sollen anhand von Plausibilitätsbetrachtungen gewonnen werden. Bei der Anwendung in Sachaufgaben kommt es vor allem darauf an, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen, welche Folgerungen man aus den Kennwerten für das Sachproblem ziehen kann.

WAHLPFLICHTGEBIET: Simulation stochastischer Prozesse

- Zufallszahlen
- Zahlenstrahl zur Visualisierung von Intervallen - "Entscheidung", ob ein Treffer gelandet wurde oder nicht
- Ablaufdiagramme ("Schnipsel eines Diagramms anordnen" oder "Diagramm kommentieren")

uebungsaufgabe_integrale.odt

Dimensionierung eines Regen-Rückhaltebeckens

Regenrückhaltebecken nehmen Regenwasser während eines starken Regenfalls auf und geben dann das Wasser langsam und zeitversetzt an die Kanalisation ab. Bevor ein solches Becken gebaut wird, soll abgeschätzt werden, ob das geplante Volumen des Beckens von 22 m³ ausreicht. Dazu wird der Zufluss durch einen kräftigen Regenfall und nachfolgend das Abpumpen des Wassers aus dem Becken mathematisch modelliert.

Der Zustrom an Wasser wird in Kubikmeter pro Stunde durch die Funktion $r(x)=-10(x-4)(x-6)$ beschrieben; x ist hier die Zeit in der Einheit „Stunden".
Zwischen 11:00 und 16:00 Uhr wird das Becken mit einer Pumpe geleert, die eine Förderleistung von 2,5 Kubikmeter pro Stunde hat.

(1) Bestimmen Sie die Wassermenge, die während des Regens in das Becken fließt (Kontrolle: $V=13{,}33\,m^3$) ! Notieren Sie die Rechenschritte auf der Folie – wenn die Zeit knapp wird, bearbeiten Sie (2) mit dem Kontrollwert!

(2) Nennen Sie die Funktion a(x), die das Abpumpen des Wassers beschreibt. Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen in das Diagramm. Berechnen Sie die Menge des Wassers, die nach dem Abpumpen noch in dem Becken übrig ist!

$$\int_a^b r(x)\,dx =$$

$$\int_4^6 -10\cdot(x-4)(x-6)\,dx =$$

NR:

$$r(x) = -10(x-4)(x-6)$$

$$= -10(x^2-6x-4x+24)$$

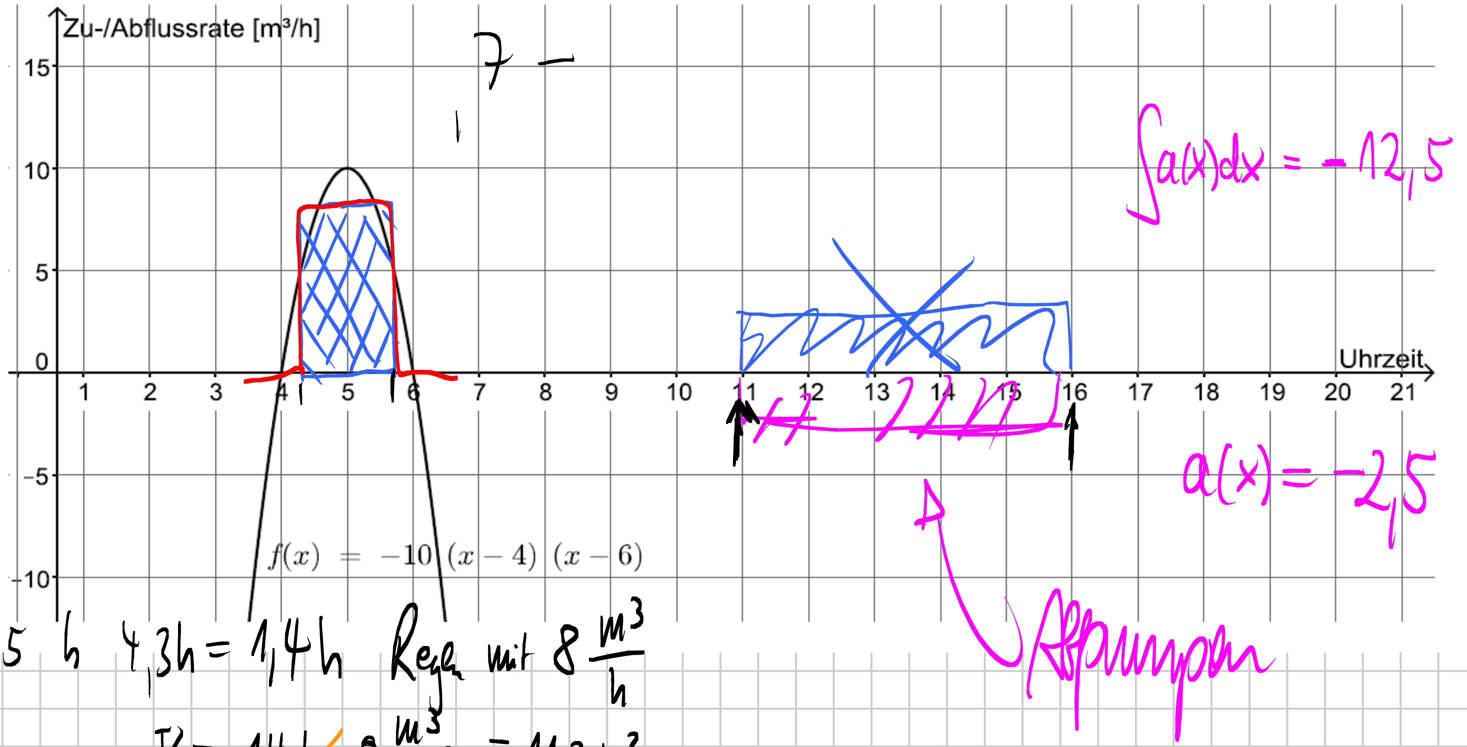
$$= -10x^2+100x-240$$

$$R(x) = -10\cdot\frac{1}{3}x^3 + 100\cdot\frac{1}{2}x^2 - 240x$$

$$\left[-\frac{10}{3}x^3 + 50x^2 - 240x\right]_4^6$$

$$6^3 - 4^3 = 2^3$$

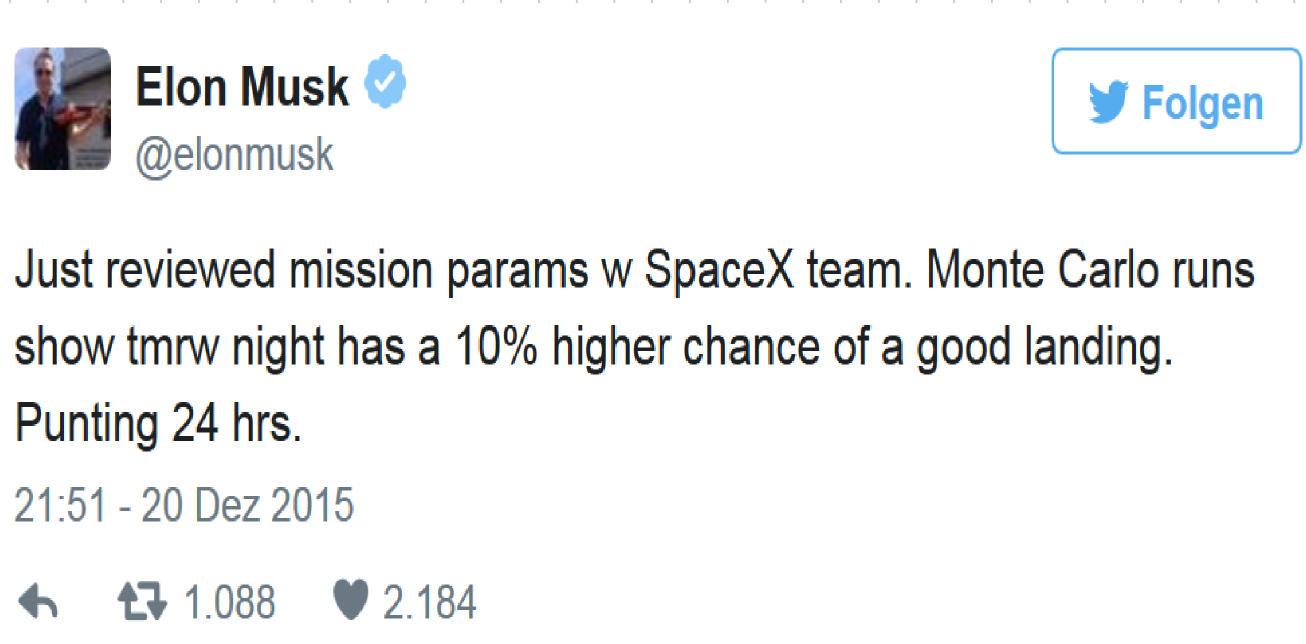
$$216 - 64 = 8$$



5 h 4,3h = 1,4 h Regen mit $8\,\frac{m^3}{h}$

$V = 1{,}4\,\cancel{h} \cdot 8\,\frac{m^3}{\cancel{h}} = 11{,}2\,m^3$

michaelbockhorst.de/abi2016m13gk



bockhorst@energieinfo.de